

SCHEMA G3: Il gruppo delle isometrie piane - addendum

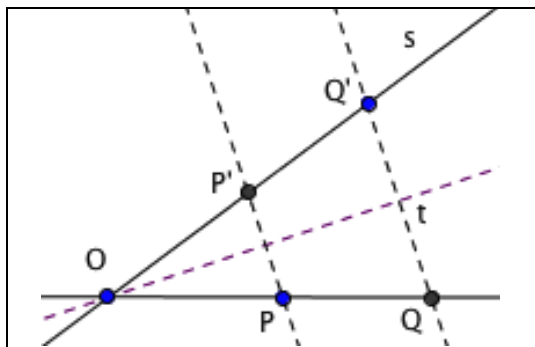
Le nozioni di vettore e di angolo orientato sono stati dati per noti. In questa aggiunta, si cerca di darne una definizione plausibile.

Come sappiamo, su una retta r abbiamo definito un ordine totale, denso e completo. Anche la sua relazione trasposta, ossia l'ordine duale od opposto, è totale, denso e completo. Fissato un punto O sulla retta, la semiretta di origine O costituita dai punti che lo seguono si muta nell'altra semiretta se si passa all'ordine opposto. Invece, il segmento di estremi A e B non cambia come insieme di punti di r che stanno fra A e B ; ossia, $AB = BA$.

Scegliamo ora uno dei due ordinamenti, ossia *orientiamo* la retta r . Allora, dati A e B su r ,

se A precede B possiamo definire il *segmento orientato* $\overrightarrow{AB}$, di *verso concorde* con l'orientamento della retta. Nell'orientamento opposto avremo il segmento orientato $\overrightarrow{BA}$, di *verso opposto* ad $\overrightarrow{AB}$.

Ora prendiamo una retta s e trasferiamo ad s l'ordinamento di r . Ci sono infiniti modi per farlo. Vediamone uno fra i tanti possibili.



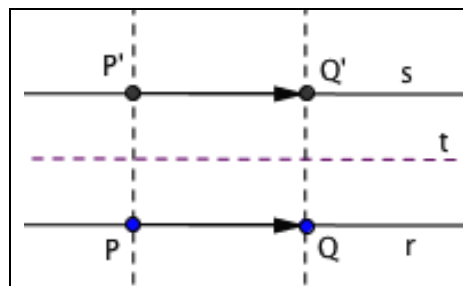
Se le rette sono incidenti in un punto O , si tracci la bisettrice t di una delle due coppie di angoli opposti al vertice. Poi, ad ogni punto $P \in r$ si associi il simmetrico P' rispetto a t , che appartiene ad s . Dati ora $P', Q' \in s$, siano P e Q i corrispondenti punti di r . Se P precede Q , imponiamo che P' preceda Q' .

Allora la simmetria rispetto a t diventa un *isomorfismo d'ordine* tra le due rette ordinate r ed s .

Si osservi però che se si sceglie la bisettrice degli altri due angoli opposti al vertice in O , l'ordinamento su s si inverte.

Il caso che ci interessa è quello delle rette r ed s parallele. Queste si possono *equiorientare* semplicemente considerando la retta t che divide a metà la striscia delimitata dalle due rette e rispetto alla quale r ed s sono simmetriche. Ad ogni punto P di r associamo il simmetrico P' rispetto a t , che appartiene ad s .

Per ogni P', Q' appartenenti ad s , siano P e Q i simmetrici rispetto a t , che appartengono ad r : se P precede Q , imponiamo che P' preceda Q' . Allora abbiamo orientato s come r , e la simmetria rispetto a t risulta un isomorfismo d'ordine fra le due rette ordinate r ed s .



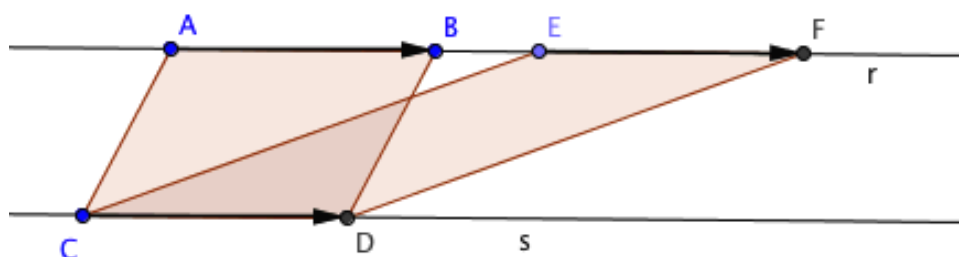
Osserviamo che i quattro punti $PP'Q'Q$ formano un rettangolo, caso particolare di parallelogramma.

Per ogni fascio di rette parallele, stabiliamo di equiorientare tutte le rette del fascio.

Ciò posto, diremo che due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono *equipollenti* se:

- sono paralleli (o sulla stessa retta),
- $AB = CD$,
- se A precede B allora C precede D .

Equivalentemente, nel caso non siano sulla stessa retta, sono equipollenti se e solo se $ABDC$ è un parallelogramma.



Nella figura, i segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equipollenti.

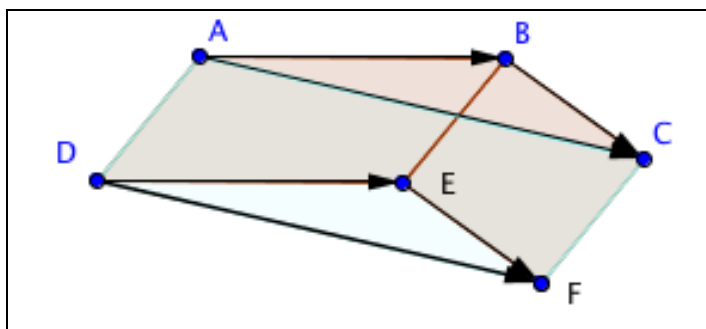
La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza fra segmenti orientati. Ogni classe prende il nome di vettore, e si denota con simboli come $\vec{v}$.

Dati un vettore $\vec{v}$ ed un punto O , esiste uno ed un solo punto P tale che $\overrightarrow{OP}$ rappresenti il vettore $\vec{v}$. Infatti, preso un rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{v}$, condotta da O la parallela ad AB , orientata come $\overrightarrow{AB}$, su ciascuna semiretta di origine O c'è un segmento OP congruente ad AB , ma uno solo dei due è tale che $\overrightarrow{OP}$ sia concorde con $\overrightarrow{AB}$.

Nell'insieme dei vettori si può definire l'operazione di *addizione*, nel modo seguente. Dati

due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sia $\overrightarrow{AB}$ un rappresentante di $\vec{v}$ e $\overrightarrow{BC}$ uno di $\vec{w}$. La somma è il vettore rappresentato da $\overrightarrow{AC}$. Naturalmente però occorre verificare che tale somma non dipenda

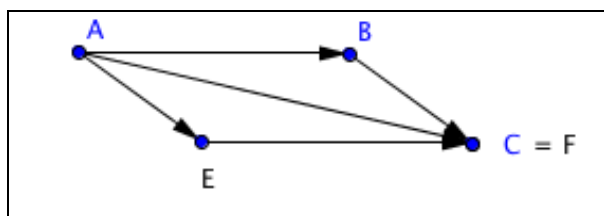
dai rappresentanti prescelti. A questo scopo si ricordi che un quadrilatero convesso con due lati paralleli e congruenti è un parallelogramma.



Siano $\vec{DE}$ ed $\vec{EF}$ altri due rappresentanti di $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Allora ABED e BCFE sono parallelogrammi. In particolare, AD, BE e CF sono congruenti e paralleli, quindi ACFD è un parallelogramma.

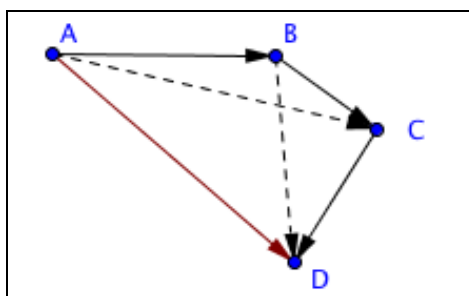
Pertanto, $\vec{DF}$ è equipollente ad $\vec{AC}$. I casi particolari di segmenti *collineari*, ossia sulla stessa retta sono trattati in modo simile.

La proprietà commutativa della somma è facile, perché presi $\vec{AE}$ ed $\vec{EF}$ equipollenti ad $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, si ha $C = F$, perché il quarto punto



del parallelogramma è unico. Un po' più complicato è mostrare la proprietà associativa.

Si potrebbe ricorrere al fatto che alla composizione di due traslazioni corrisponde la somma dei rispettivi vettori e si ha un isomorfismo tra la struttura $(T, \circ)$ delle traslazioni con la composizione e quella, $(V, +)$ dei vettori con l'addizione: l'una è associativa, l'altra è commutativa e così lo sono entrambe.



Oppure, seguendo la figura,

$$\begin{aligned} \left(\vec{AB} + \vec{BC} \right) + \vec{CD} &= \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} \\ \vec{AB} + \left(\vec{BC} + \vec{CD} \right) &= \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} \end{aligned}$$

L'elemento neutro è il vettore nullo, identificato con la classe di congruenza dei punti.

Allora, per ogni vettore $\vec{v}$, sia $\vec{AB}$ un suo rappresentante; il vettore opposto $\vec{BA}$ è tale che $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} =$ vettore nullo, quindi $\vec{BA}$ rappresenta il vettore $-\vec{v}$ opposto di $\vec{v}$. Pertanto, $(V, +)$ è un gruppo abeliano.

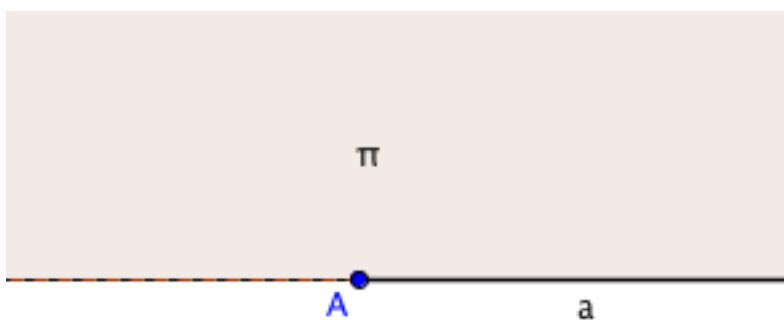
NOTA. Se nel piano si introducono le coordinate cartesiane ortogonali monometriche, di origine O,

allora ogni vettore si rappresenta con un segmento orientato $\vec{OP}$, e l'addizione di vettori

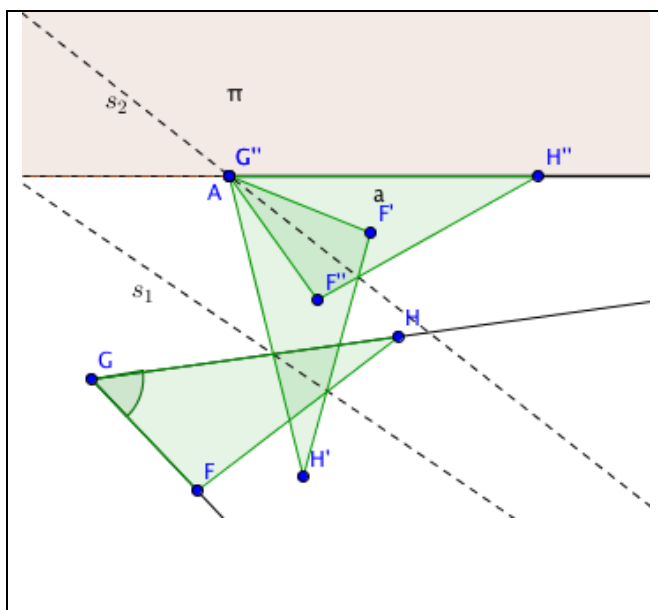
corrisponde all'addizione in $\mathbf{R}^2$. Ossia, $(V, +)$ è isomorfo ad $(\mathbf{R}^2, +)$ oltre che al gruppo $(T, \circ)$ delle traslazioni.

Ora passiamo alla nozione di **orientamento degli angoli**. Si parla di orientamento *in senso orario* o *antiorario*, ma che cosa significano queste parole di origine fisica nel caso del piano? Cerchiamo un modo per equiorientare tutti gli angoli, qualunque sia il loro vertice.

Cominciamo col fissare un punto A , una retta r per A , la orientiamo e prendiamo la semiretta a dei punti che seguono A . Poi scegliamo uno dei semipiani d'origine r , o, equivalentemente, uno dei due angoli piatti di vertice A coi lati su r , che indicheremo al solito con π . Chiamiamo *sistema di riferimento* la terna (A, a, π) .



Ogni angolo convesso di vertice A , con un lato su a , sarà concorde con la terna (A, a, π) se ha un lato sulla semiretta a ed è incluso in π , mentre se è concavo dovrà contenere π . In tal modo avremo ordinato gli angoli di vertice A per inclusione e diremo che a è il loro *primo lato*.

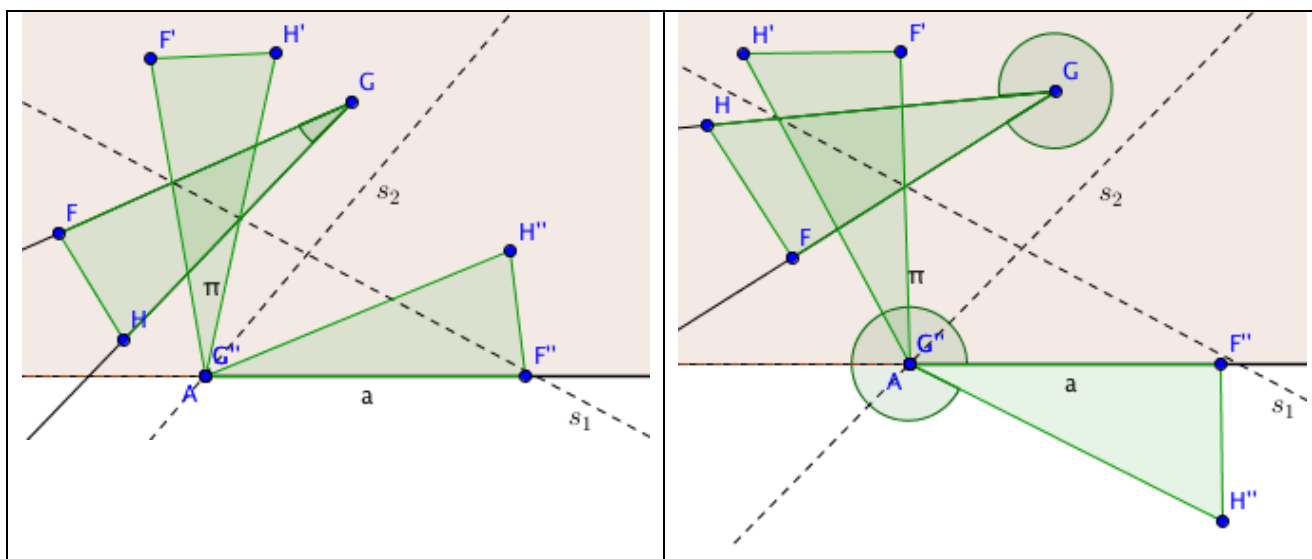


Ora consideriamo un angolo convesso $\widehat{FGH}$; *orientarlo* significa scegliere uno dei due lati come *primo lato*. Scegliamo per esempio $\overrightarrow{GH}$. Ora trasportiamo il triangolo FGH con l'ausilio di due simmetrie assiali (l'asse di AG e la bisettrice di $\widehat{H'AB}$, dove B è un punto di a) in modo che G vada a finire in A e $\overrightarrow{GH}$ sulla semiretta a . Se il triangolo va a finire entro il semipiano π allora diremo che l'angolo $\widehat{HGF}$ è orientato concordemente col sistema (A, a, π) ; se no, è discorde.

Nel caso della figura precedente, l'orientamento è discorde. Se invece scegliamo come primo lato GF, allora il triangolo con le due simmetrie rispetto all'asse di AG e alla bisettrice di $F'\hat{A}B$ va a finire entro π e l'orientamento è concorde col sistema (A, a, π) .

La scelta di due e due sole simmetrie è dovuta al pretendere che sia un *movimento* a trasportare il triangolo e quindi l'angolo.

Nella prima delle due figure sottostanti vediamo il caso di angolo convesso $F\hat{G}H$ in cui GF è il primo lato e l'orientamento è concorde col sistema (A, a, π) . Nella seconda vediamo l'angolo concavo $F\hat{G}H$, nel quale l'orientamento ha come primo lato il secondo lato del suo esplementare convesso, ossia GH. Vediamo come con le due simmetrie l'angolo concavo vada a contenere π e quindi è concorde col sistema (A, a, π) .



Allora abbiamo stabilito due possibili orientamenti per ogni angolo: uno è concorde col sistema (A, a, π) , l'altro no.

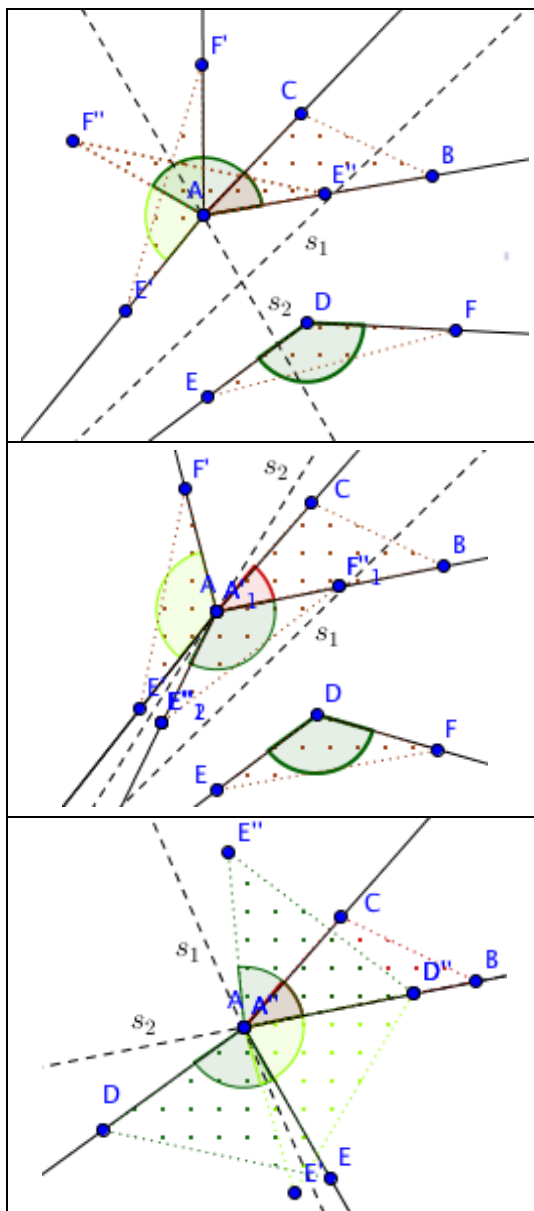
Ora osserviamo che se consideriamo la semiretta a' opposta ad a , otteniamo un sistema di riferimento (A, a', π) col quale sono concordi gli angoli discordi con (A, a, π) . Lo stesso accade se prendiamo l'altro angolo piatto π' opposto a π , ossia (A, a, π') . Invece, (A, a', π') dà un sistema concorde con (A, a, π) . Diremo **opposti** i due orientamenti (A, a, π) e (A, a, π') .

Diremo che due angoli sono *equiorientati* se sono entrambi orientati concordemente col sistema (A, a, π) oppure col sistema opposto (A, a, π') .

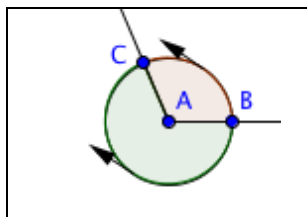
Otteniamo subito che due angoli $\hat{BAC}$ ed $\hat{EDF}$ sono equiorientati se mediante la simmetria rispetto all'asse s_1 di AD e quella rispetto alla bisettrice s_2 dell'angolo fra i due primi lati, possono essere inclusi uno nell'altro. Nella figura, i primi lati sono AB e DE rispettivamente. Con la prima simmetria si ottiene l'angolo $\hat{E'AF'}$, il cui primo lato è AE'. La simmetria rispetto alla bisettrice di $\hat{E'AB}$ porta ora $\hat{E'AF'}$ in $\hat{BAF''}$, che include $\hat{BAC}$. Allora i due angoli dati sono equiorientati.

Se invece scegliamo DF come primo lato di $\hat{EDF}$, allora la seconda simmetria è rispetto alla bisettrice di $\hat{F'AB}$ e quindi l'angolo $\hat{F'AE'}$ diventa $\hat{BAE''}$, che non include $\hat{BAC}$ e non è incluso in esso. Quindi stavolta l'orientamento dei due angoli è discorde.

Se i due angoli $\hat{BAC}$ e $\hat{DAE}$ hanno lo stesso vertice A, e i due primi lati sono AB e AD, allora il primo asse di simmetria è la bisettrice di $\hat{DAB}$ ed il secondo è la retta AB. Nella figura qui accanto, i due angoli orientati sono concordi, perché alla fine il corrispondente $\hat{BAE''}$ di $\hat{DAE}$ nelle due simmetrie contiene $\hat{BAC}$.



L'addizione di angoli equiorientati si esegue come se non lo fossero: si portano ad essere consecutivi, si sommano e all'angolo somma si dà lo stesso orientamento. Se sono discordi, si fa la loro differenza, che si orienta come l'angolo maggiore. Se sono discordi e congruenti, il risultato è l'angolo nullo.



Ma anche la somma di un angolo orientato col suo esplementare equiorientati dà per somma l'angolo nullo (modulo 2π). Ciò impone di identificare un angolo orientato col suo esplementare orientato in senso discorde, come avviene secondo il senso comune....

Riassunto: ogni angolo si può orientare in due modi diversi, concorde o discorde con la terna (A, a, π) a seconda che si scelga l'una o l'altra delle sue semirette come primo lato. Il confronto di un angolo con l'angolo piatto π di riferimento o con un altro angolo avviene attraverso due simmetrie assiali, quindi un movimento, per portarli ad avere il primo lato in comune. L'orientamento sarà concorde se e solo se alla fine uno dei due angoli conterrà l'altro. I termini “senso orario” o “senso antiorario” non hanno acquisito così un significato preciso, intrinseco, ma comunque possiamo usarli per indicare l'uno o l'altro dei due orientamenti (A, a, π) o (A, a, π') .

L'addizione, ottenuta portando con due simmetrie il primo lato del secondo angolo a coincidere col secondo lato del primo angolo, sarà, come detto, la somma o la differenza dei due, con l'orientamento del maggiore dei due, se non è nulla. Occorre però identificare ogni angolo con il suo esplementare orientato in modo discorde, ossia con lo stesso primo lato. L'opposto di un angolo è invece il suo esplementare orientato concordemente con l'angolo dato. Allora si ottiene un gruppo abeliano, isomorfo ad $(\mathbb{R}/\langle 2\pi \rangle, +)$.